Scheda 3: Integrali di volume e integrali di superficie

Esercizio 1: Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{\sqrt{x}}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz$$

dove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Esercizio 2 (dal Marcellini-Sbordone): Sia

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{4}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}, |z| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

(i) Cosa rappresenta V?

(ii) Si calcoli $\int_V (x^2+y^2)dxdydz$. [Suggerimento: si scriva $\int_V$ come $\int_{V_1} - \int_{V_2}$, dove V_1 e V_2 sono dei solidi elementari].

Esercizio 3 (dal Marcellini-Sbordone): Sia $\alpha \geq 0$ e

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

(i) Cosa rappresenta A?

(ii) Calcolare l'integrale $\int_A (x^2+y^2+z^2)^\alpha \, dxdydz$.

(iii) Si può estendere il risultato trovato in (ii) per $-\frac{3}{2} < \alpha < 0$? Cosa succede per $\alpha = -\frac{3}{2}$?

Esercizio 4: Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, 1 < x^2+y^2+z^2 < 2, \; x^2+y^2-z^2 < 0\}$.

(i) Cosa rappresenta A? Abbozzare un disegno.

(ii) Calcolare l'integrale $\int_A \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdydz$.

Esercizio 5: Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 2, \; x^2+y^2 < z\}$.

(i) Abbozzare un disegno di Ω.

(ii) Calcolare l'integrale $\int_A z^2 \, dxdydz$. [Suggerimento: utilizzare coordinate cilindriche]

Esercizio 6 (dal Marcellini- Sbordone): Si calcoli il volume di

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1, \, 0 \leq z(1+x^2+y^2) \leq xy\}.$$

Esercizio 7 (dal Marcellini-Sbordone): Sia S la sfera di centro l'origine e raggio $r > 0$. Si calcoli l'integrale superficiale $\int_S (x^2 - y^2 + y + 3z^2)d\sigma$. [Per semplificare i calcoli si ricordi che l'integrale su $[0, 2\pi]$ delle funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ e $\sin(ax)$, $\cos(ax)$ con $a \in \mathbb{N}, a \geq 1$ è nullo.]

Esercizio 8: Sia $\gamma(t) := (x(t), z(t)) = (t^2 + 1, t)$ per $t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. Sia Σ la superficie ottenuta per rotazione di γ attorno all'asse z. Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{1}{(1 + 4z^2)^{3/2}\sqrt{x^2 + y^2}}\, d\sigma$$

Esercizio 9: Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 1\}$. Si calcoli $\int_\Sigma (x^2 + y^2)d\sigma$.

Esercizio 10: Sia $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\}$. Si calcoli

$$\int_P \frac{1}{4z + 1} d\sigma$$

Soluzioni

Esercizio 2: V è la parte del cubo unitario centrato nell'origine non contenuta nella sfera inscritta al cubo. Risulta $\frac{1}{6} - \frac{\pi}{60}$.

Esercizio 3: A è la parte di sfera di raggio 1 al di sotto del cono retto con vertice in $(0,0)$ e altezza coincidente con l'asse z e contenuta nel semispazio $z \geq 0$. Risulta $\frac{\sqrt{2}\pi}{2\alpha+3}$. Il risultato si può estendere per i valori di α indicati nel testo, per $\alpha = -3/2$ la funzione $\rho^{2\alpha+2} = \rho^{-1}$ non è integrabile in un intorno di zero. Ne segue che per $\alpha = -3/2$ l'integrale è divergente.

Esercizio 4: A è il volume contenuto nella sfera di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, al di fuori della sfera di centro l'origine e raggio 1 e all'interno del cono retto di vertice $(0,0)$ e altezza coincidente con l'asse z. Risulta $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{2} - 6)$

Esercizio 5: Ω è l'intersezione tra la sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ e il paraboloide con vertice in $(0,0)$ rivolto verso l'alto (z crescenti). Risulta $\frac{\pi}{60}(32\sqrt{2} - 13)$

Esercizio 6: Risulta $\frac{1}{4}(3\log 3 - 4\log 2)$

Esercizio 7: Risulta $4\pi r^4$.

Esercizio 8: Risulta $\frac{2\pi^2}{3}$

Esercizio 9: Risulta $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

Esercizio 10: Risulta $\frac{\pi}{2}(\sqrt{5} - 1)$.